JOURNAL OF ALGEBRA 173, 44–66 (1995)

Sur une classe d'anneaux qui généralisent les anneaux de Dedekind

MARCO FONTANA*

Dipartimento di Matematica, Terza Università degli Studi di Roma, 00146 Roma, Italia

ET

NICOLAE POPESCU†

Institut de Mathématiques, Académie de Roumanie, 70700 Bucarest, Roumanie

Communicated by Richard G. Swan

Received November 6, 1992

0. INTRODUCTION ET RAPPELS

Tous les anneaux considérés dans le présent papier sont commutatifs, unitaires, et intègres.

Un *suranneau* d'un anneau A est un anneau qui contient A comme sous-anneau et qui est contenu dans le corps des fractions de A.

Nous rappelons qu'un *système localisant* (en bref, s.l.) $\mathscr{F}$ d'un anneau A est une famille d'idéaux de A telle que:

(SL1) $I \in \mathscr{F}$, J idéal de A, $I \subseteq J \Rightarrow J \in \mathscr{F}$;

(SL2) $I \in \mathscr{F}$, J idéal de A, $(J :_A iA) \in \mathscr{F}$ pour tout $i \in I \Rightarrow J \in \mathscr{F}$.

Tous les systèmes localisants considérés dans ce papier ne sont pas banals, c.-à-d. ils vérifient aussi la propriété suivante:

(SL0) $\qquad (0) \notin \mathscr{F} \quad \text{et} \quad A \in \mathscr{F}.$

Si $\mathscr{F}$ est s.l., alors il est facile de voir que:

$$I, J \in \mathscr{F} \Rightarrow IJ \in \mathscr{F} \qquad (\text{et donc } I \cap J \in \mathscr{F}). \tag{0.1}$$

Un *système localisant* $\mathscr{F}$ est dit *de type fini* si, pour tout $I \in \mathscr{F}$, il existe un idéal de type fini $I' \in \mathscr{F}$ tel que $I' \subseteq I$.

*Travail effectué dans le cadre d'une *NATO Collaborative Research Grant* CRGN.900113.

†Travail effectué avec le support du Programme du *Consiglio Nazionale delle Ricerche* pour les Professeurs Visiteurs.

0021-8693/95 $6.00

Si K est le corps de fractions de A et si $\mathscr{F}$ est un système localisant de A, alors il n'est pas difficile de vérifier que:

$$A_{\mathscr{F}} := \{x \in K : (A :_A xA) \in \mathscr{F}\} \tag{0.2}$$

est un suranneau de A, dit *anneau des fractions de A par rapport au système localisant* $\mathscr{F}$.

On voit aussitôt que:

$$A_{\mathscr{F}} = \bigcup\{(A :_K I) : I \in \mathscr{F}\}; \tag{0.3}$$

si P est un idéal premier de A et

$$\mathscr{F}_P := \{I : I \text{ idéal de } A \text{ et } I \not\subseteq P\} \text{ alors,}$$
$$\mathscr{F}_P \text{ est un s.l. de } A \text{ et } A_{\mathscr{F}_P} = A_P. \tag{0.4}$$

Les systèmes localisants, les topologies de Gabriel, et les théories de torsion héréditaire sont des notions équivalentes et ont été étudiés à partir des années 1960 pour étendre au cas des anneaux non commutatifs la théorie de la localisation (cf. par exemple [B, Chap. 2, §2, Ex. 17–25] et [St]).

Les anneaux de Prüfer (c.-à-d. les anneaux tels que toute localisation dans un idéal maximal est un anneau de valuation) généralisent les anneaux de Dedekind en affaiblissant leur propriété suivante:

(pD) toute localisation dans un idéal maximal est un anneau de valuation discrète de dimension 1.

Pour aborder de nombreux problèmes dans la théorie multiplicative des idéaux, les anneaux de Prüfer constituent une classe trop vaste d'anneaux. Pour cette raison, plusieurs classes particulières d'anneaux de Prüfer ont été étudiées.

Les *anneaux presque-Dedekind* ont été introduits par Gilmer et sont précisément les anneaux intègres qui vérifient (pD) [G1].

Les anneaux de Prüfer A qui vérifient la propriété suivante (satisfaite par tout anneau de Dedekind; cf. Théorème 2.7 (iii) $\Rightarrow$ (i)):

(Dg) Pour tout suranneau B de A, il existe un unique système localisant $\mathscr{F}$ de A tel que $B = A_{\mathscr{F}}$,

ont été étudiés par Popescu [P] sous le nom d'*anneaux de Dedekind généralisés*.

Dans le présent papier, après avoir donné une caractérisation des anneaux de Prüfer par le moyen de la notion de système localisant, nous développons d'avantage la théorie des anneaux de Dedekind généralisés.

Les résultats principaux consistent en de nouvelles caractérisations des anneaux de Dedekind généralisés et en des théorèmes de permanence de la propriété d'être un anneau de Dedekind généralisé dans quelques cas importants d'extensions du corps de fractions.

Nous étudions aussi le comportement des anneaux de Dedekind généralisés dans les carrés cartésiens d'un type standard. Une telle étude nous amène à construire plusieurs exemples d'anneaux de Dedekind généralisés qui permettent de bien délimiter la portée des résultats obtenus.

Les auteurs tiennent à remercier A. Facchini, I. Papick, et le *referee* pour les suggestions concernant quelques aspects du présent papier.

1. Une caractérisation des anneaux de Prüfer

Dans ce paragraphe nous nous proposons de donner une caractérisation des anneaux de Prüfer par le moyen de la notion de système localisant. Nous commençons par remarquer que les extensions plates d'anneaux sont étroitement liées aux anneaux de fractions par rapport à des systèmes localisants particuliers:

Lemme 1.1. *Soit B un suranneau plat d'un anneau intègre A et soit $\mathscr{F}_1(B) := \{I\colon I$ idéal de A, $IB = B\}$. Alors*

(a) *$\mathscr{F}_1(B)$ est un système localisant de type fini de A et $A_{\mathscr{F}_1(B)} = B$.*

(b) *$\mathscr{F}_1(B)$ est le plus petit élément de $\mathscr{F}(B) := \{\mathscr{F} : \mathscr{F}$ est un s.l. de A et $A_{\mathscr{F}} = B\}$.*

Démonstration. (a) Les conditions (SL0) et (SL1) sont trivialement vérifiées par $\mathscr{F}_1(B)$. Par la platitude de B sur A, sous les hypothèses de (SL2) nous avons:

$$B = (J :_A iA)B = (JB :_B iB) = i^{-1}JB \cap B, \text{ pour tout } i \in I, i \neq 0$$

donc $iB \subseteq JB$ pour tout $i \in I$, c.-à-d. $IB \subseteq JB$. Du fait que $IB = B$, il découle que $JB = B$. Il est clair que $\mathscr{F}_1(B)$ est un système localisant de type fini, car pour tout $I \in \mathscr{F}_1(B)$ on peut trouver $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ et $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ de façon telle que:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k b_k = 1, \qquad \text{c.-à-d. } (i_1, i_2, \dots, i_n)B = B, \tag{1.1.1}$$

donc l'idéal $I_f := (i_1, i_2, \dots, i_n)A \subseteq I$ et $I_f \in \mathscr{F}_1(B)$.

Soit x un élément non zéro dans le corps de fractions K de A, alors:

$$x \in A_{\mathscr{F}_1(B)} \Leftrightarrow B = (A :_A xA)B = (B :_B xB) \Leftrightarrow x^{-1}B \cap B = B \Leftrightarrow x \in B.$$

(b) Si $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(B)$ et $I \in \mathscr{F}_1(B)$ alors $IB = B$, donc on peut trouver $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ et $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ qui vérifient (1.1.1). De plus, pour tout $b \in B$, $(A :_A bA) \in \mathscr{F}$ car $B = A_{\mathscr{F}}$ (0.2), donc $J := \bigcap\{(A :_A b_i A): 1 \leq i \leq n\} \in \mathscr{F}$. Il est clair que $J \subseteq I$, car si $x \in J$ alors $x = \sum_{k=1}^{n} i_k(b_k x) \in I$. De ce qui précède on déduit que $I \in \mathscr{F}$ et donc $\mathscr{F}_1(B) \subseteq \mathscr{F}$. ∎

Remarque 1.2. (a) Il est possible de préciser l'énoncé du Lemme 1.1 de façon telle d'avoir une caractérisation des suranneaux plats d'un anneau donné: Soit B un suranneau d'un anneau A, alors B est A-plat si et seulement si il existe un système localisant $\mathscr{F}$ de A tel que $A_{\mathscr{F}} = B$ et que, pour tout $I \in \mathscr{F}$, $IB = B$. En effet, si $b \in B = A_{\mathscr{F}}$, où $\mathscr{F}$ est un système localisant du type précédent, alors $(A :_A bA) \in \mathscr{F}$ et donc $(A :_A bA)B = B$. La conclusion découle de [A, Theorem 1].

(b) Si S est une partie multiplicative d'un anneau A, alors du Lemme 1.1 on déduit que $\mathscr{F}_1(A_S) = \{I : I$ idéal de A tel que $IA_S = A_S\} = \{I : I$ idéal de A tel que $I \cap S \neq \emptyset\}$ est un système localisant (de type fini) de A et $A_{\mathscr{F}_1(A_S)} = A_S$ (cf. aussi [St, Chap. IX, §1, Ex. 2]).

(c) De (0.1) il s'ensuit que les anneaux de fractions par rapport à un système localisant sont des cas particuliers des transformés généralisés introduits par Heinzer, Ohm, et Pendleton dans [H] et [HOP], mais implicitement considérés par Krull [K] (voir aussi [AB]).

LEMME 1.3. *Si A est un anneau intègre et intégralement clos et si $\mathscr{F}$ est un système localisant de A, alors $A_{\mathscr{F}}$ est intégralement clos.*

Démonstration. Soit x un élément non zéro dans le corps de fractions de A tel que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{avec } a_i \in A_{\mathscr{F}}, 0 \leq i \leq n-1.$$

Soit $J_i \in \mathscr{F}$ tel que $a_i J_i \subseteq A$, $0 \leq i \leq n-1$, alors, pour tout $j \in J := \prod_{i=0}^{n-1} J_i \in \mathscr{F}(0.1)$, on a

$$(xj)^n + (a_{n-1}j)(xj)^{n-1} + \cdots + (a_1 j^{n-1})(xj) + a_0 j^n = 0$$

avec $a_k j^{n-k} \in A$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$, donc $xj \in A$ pour tout $j \in J$, c.-à-d. $xJ \subseteq A$, donc $x \in A_{\mathscr{F}}$. ∎

Nous rappelons la classification des systèmes localisants d'un anneau de valuation donnée par Brandal et Barbut:

LEMME 1.4 [BB, Theorem 3.3]. *Soit V un anneau de valuation et P un idéal premier de V. Posons*

$$\mathcal{F}_P := \{I : I \text{ idéal de } V \text{ tel que } P \subset I\},$$

$$\overline{\mathcal{F}}_P := \{I : I \text{ idéal de } V \text{ tel que } P \subseteq I\}$$

alors:

(a) *$\mathcal{F}_P$ est un système localisant de V et $V_{\mathcal{F}_P} = V_P$.*

(b) *$\overline{\mathcal{F}}_P$ est un système localisant de V si et seulement si $(0) \neq P = P^2$, dans cette situation $V_{\overline{\mathcal{F}}_P} = V_P$.*

(c) *Pour tout système localisant $\mathcal{F}$ de V, il existe soit un idéal premier P de V tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P$ soit un idéal premier idempotent non zéro Q de V tel que $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}_Q$.* ∎

EXEMPLE 1.5. Si (V, M) est un anneau de valuation dont son idéal maximal $M \neq 0$ est idempotent, alors $\mathcal{F} = \{V, M\}$ est un système localisant (Lemme 1.4(b)), qui n'est pas de type fini (car M ne peut pas être de type fini). Notons aussi que $\mathcal{F}' = \{V\}$ est un système localisant de type fini de V et $V_{\mathcal{F}} = V_{\mathcal{F}'} = V$.

Un anneau A est dit *totalement localisant*, en bref t.l., (respectivement, *totalement localisant de type fini*, en bref t.l.f.) si pour suranneau B de A il existe un système localisant (respectivement, un système localisant de type fini) $\mathcal{F}$ de A tel que $B = A_{\mathcal{F}}$.

LEMME 1.6. *Soit P un idéal premier d'un anneau A. Si A est t.l. (respectivement, t.l.f.) alors A_P est t.l. (respectivement, t.l.f.).*

Démonstration. Soit B un suranneau de A_P. Par hypothèse il existe un système localisant (respectivement, un système localisant de type fini) $\mathcal{F}$ de A tel que $B = A_{\mathcal{F}}$. Soit $\mathcal{F}' := \{J' : J'$ idéal de A_P, $\exists\ I \in \mathcal{F}$ avec $J' \supseteq IA_P\}$. Le fait que $\mathcal{F}'$ est un système localisant de A_P a déjà été observé dans [BB, Proposition 1.2]. Nous en donnons de même une preuve, car les techniques seront utiles par la suite. Les propriétés (SL0) et (SL1) étant immédiates, nous vérifions la (SL2). Soient $J' \in \mathcal{F}'$ et L' un idéal de A_P tel quel $(L' :_{A_P} j'A_P) \in \mathcal{F}'$ pour tout $j' \in J'$. Il est facile de voir que $J' = JA_P$ pour un quelque $J \in \mathcal{F}$ et donc $((L' \cap A) :_A jA) = (L' :_{A_P} jA_P) \cap A$, pour tout $j \in J$. Par hypothèse $(L' :_{A_P} jA_P) \supseteq L_j A_P$ avec $L_j \in \mathcal{F}$, d'où $((L' \cap A) :_A jA) \supseteq L_j$ pour tout $j \in J$, donc $L' \cap A \in \mathcal{F}$ par la propriété (SL2) de $\mathcal{F}$. Mais $L' \supseteq (L' \cap A)A_P$ donc $L' \in \mathcal{F}'$. Il est clair que si $\mathcal{F}$ est de type fini alors $\mathcal{F}'$

est aussi de type fini. Pour terminer il suffit de montrer que $(A_P)_{\mathscr{F}'} = B$. Si $\beta \in B$ alors il existe $I \in \mathscr{F}$ tel que $\beta I \subseteq A$, donc $\beta I A_P \subseteq A_P$ par conséquent $\beta \in (A_P)_{\mathscr{F}'}$.

Réciproquement, si $x \in (A_P)_{\mathscr{F}'}$ alors $xIA_P \subseteq A_P$ pour un quelque $I \in \mathscr{F}$. Posons $J := (A :_A xA)$. Pour tout $i \in I$, nous avons $(J :_A iA) = ((A :_A xA) :_A iA) = (A :_A xiA)$. D'autre part $xi = a/s$ avec $a \in A$ et $s \in A \setminus P$, donc $(J :_A iA) \supseteq sA$. Du fait que $s \in A \setminus P$ on peut déduire que $sA \in \mathscr{F}_P \subseteq \mathscr{F}$. Par conséquent $(J :_A iA) \in \mathscr{F}$ pour tout $i \in I \in \mathscr{F}$, donc $J \in \mathscr{F}$, d'où $x \in A_{\mathscr{F}} = B$. ∎

LEMME 1.7. *Un anneau local t.l.f. est un anneau de valuation.*

Démonstration. Soit (V, M) un anneau de valuation qui domine un anneau local t.l.f. (A, M). Par hypothèse, $V = A_{\mathscr{F}}$ où $\mathscr{F}$ est un système localisant de type fini de A. Posons $\mathscr{F}' := \{I' : I' \text{ idéal de } V \text{ tel que } I' \cap A \in \mathscr{F}\}$. Il est clair que $\mathscr{F}'$ vérifie (SL0) et (SL1). Soient $I' \in \mathscr{F}'$ et J' un idéal de V tel que $(J' :_V xV) \in \mathscr{F}'$, pour tout $x \in I'$. Il est clair que, pour tout $i \in I' \cap A \in \mathscr{F}$, $((J' \cap A) :_A iA) = (J' :_V iV) \cap A$. Par conséquent $((J' \cap A) :_A iA) \in \mathscr{F}$, pour tout $i \in I' \cap A$, donc $J' \cap A \in \mathscr{F}$ par la propriété (SL2) de $\mathscr{F}$, d'où $\mathscr{F}'$ vérifie aussi (SL2). On peut donc affirmer que $\mathscr{F}'$ est un système localisant de type fini, car $\mathscr{F}$ est de type fini. Du Lemme 1.4(c), nous déduisons que $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_P$ pour un quelque idéal premier P de V. Posons $p := P \cap A$. Nous nous proposons de montrer que $\mathscr{F}_p \subseteq \mathscr{F}$. En effet, soit $I \in \mathscr{F}_p$ donc $I \not\subseteq p$. Si $a \in I \setminus p$, alors $aV \not\subseteq P$ et donc $aV \supset P$. Soit $I_{\mathscr{F}} := \{v \in V : \exists F \in \mathscr{F} \text{ tel que } vF \subseteq I\}$ et soit $\tilde{I} := I_{\mathscr{F}} \cap A$. Du fait que $aV \in \mathscr{F}'$, nous déduisons que $I_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F}'$ et donc que $\tilde{I} \in \mathscr{F}$. De la définition de $\tilde{I}$, il s'ensuit que, pour tout $y \in \tilde{I}$, $(I :_A yA) \in \mathscr{F}$ et donc, à cause de (SL2), $I \in \mathscr{F}$.

L'inclusion $\mathscr{F}_p \subseteq \mathscr{F}$ implique que $A_p \subseteq V = A_{\mathscr{F}}$. Du fait que nous avons supposé que V domine A, il s'ensuit que $p = m$ et donc $P = M$. Par conséquent $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_M = \{V\}$, donc, pour tout $I \in \mathscr{F}$, $IV = V$. Mais alors on a $\mathscr{F} = \{A\}$, car pour $I \subseteq m$ il s'ensuit que $IV \subseteq M$. On peut alors conclure que $V = A_{\mathscr{F}} = A$. ∎

THÉORÈME 1.8. *Pour un anneau A donné, les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un anneau de Prüfer.*

(ii) *A est intégralement clos totalement localisant.*

(iii) *A est totalement localisant de type fini.*

Démonstration. Il est bien connu qu'un anneau A est de Prüfer si et seulement si tout suranneau B de A est intégralement clos [D, Theorem

1] ou, de façon équivalente, si et seulement si tout suranneau B de A est A-plat [R, Theorem 4] (cf. aussi [G3, Theorem 26.2 et p. 490–491]).

(i) $\Rightarrow$ (ii) et (i) $\Rightarrow$ (iii) découlent du Lemme 1.1(a).

(ii) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence du Lemme 1.3.

(iii) $\Rightarrow$ (i) pour tout idéal premier P de A, l'anneau local A_P est t.l.f. (Lemme 1.6). La conclusion s'ensuit du Lemme 1.7. ∎

2. Anneaux de Dedekind généralisés: cas local et cas global

Si $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ sont deux systèmes localisants distincts d'un anneau intègre A, alors il peut s'avérer que $A_{\mathscr{F}'} = A_{\mathscr{F}''}$, même si A est local et de Prüfer (cf. Exemple 1.5).

Nous pouvons reformuler la définition en disant qu'un anneau de Dedekind généralisé A est un anneau de Prüfer tel que, si $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ sont deux systèmes localisants distincts de A, alors $A_{\mathscr{F}'} \neq A_{\mathscr{F}''}$.

Nous nous proposons tout d'abord de mieux approfondir l'étude des anneaux de Dedekind généralisés dans le cas local. Nous rappelons qu'un *anneau de valuation discrète* V est un anneau de valuation dont tout idéal premier branché (c.-à-d. qui possède un idéal primaire non banal) n'est pas idempotent ou, ce qui revient au même, tout idéal primaire est une puissance d'un idéal premier [G3, Theorem 17.3 (b) et p. 192]. Nous dirons qu'un *anneau* est *de valuation discrète forte* si tout idéal premier non zéro n'est pas idempotent.

Lemme 2.1.

(a) *Tout anneau de valuation discrète forte est un anneau de valuation discrète.*

(b) *Tout suranneau d'un anneau de valuation discrète (respectivement, discrète forte) est encore un anneau de valuation discrète (respectivement, discrète forte).*

(c) *L'idéal maximal d'un anneau de valuation discrète forte est principal.*

Démonstration. Les affirmations (a) et (b) sont des conséquences faciles des définitions.

(c) Soit M l'idéal maximal d'un anneau de valuation discrète forte V, qui n'est pas un corps, et soit $x \in M \setminus M^2$. Pour tout $m \in M$, si $m \notin xV$, alors $xV \subset mV$ donc $x = my$ pour un quelque $y \in M$: une contradiction. ∎

Nous rappelons qu'un anneau A est dit *SV-stable* si pour tout idéal non zéro I de A, I est inversible dans $(I : I)$ [AHP].

THÉORÈME 2.2. *Soit A un anneau local. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un anneau de Dedekind généralisé.*

(ii) *A est un anneau de valuation et, pour tout système localisant $\mathcal{F}$ de A, il existe un (unique) idéal premier P de A tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_P$.*

(iii) *A est un anneau de valuation discrète forte.*

(iv) *A est un anneau de valuation discrète qui vérifie la condition de la chaîne ascendente sur les idéaux premiers.*

(v) *A est un anneau de valuation discrète dont* Spec(A) *est un espace noethérien.*

(vi) *A est un anneau de valuation discrète dont tout idéal radical est le radical d'un idéal principal.*

(vii) *A est un anneau de valuation discrète dont tout idéal premier est le radical d'un idéal principal.*

(viii) *A est un anneau de valuation tel que, pour tout idéal premier P de A, PA_P est principal dans A_P.*

(ix) *A est un anneau intégralement clos et SV-stable.*

(x) *A est un anneau de valuation tel que, pour tout idéal I de A, il existe un idéal premier P de A et un élément x dans K de façon telle que $I = xP$.*

Démonstration. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est une conséquence facile du fait que tout suranneau d'un anneau de valuation est une localisation dans un idéal premier approprié.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) découle du Lemme 1.4.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Soit $P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n \subset \cdots$ une chaîne ascendente d'idéaux premiers de A qui n'est pas stationnaire, alors l'idéal $P := \bigcup\{P_n : n \geq 1\}$ est un idéal premier idempotent [G3, Theorem 17.3 (c) and (d)].

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) est une conséquence immédiate du fait que, dans un anneau de valuation, les idéaux radicaux coïncident avec les idéaux premiers.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi). Il suffit de rappeler que, pour tout anneau A, $X :=$ Spec(A) est un espace noethérien si et seulement si tout sous-ensemble ouvert de X est quasi-compact [B, Chap. II, §4 N. 2, Prop. 9], c.-à-d. si et seulement si tout idéal radical de A est le radical d'un idéal de type fini. L'équivalence découle alors du fait que, dans un anneau de valuation, tout idéal de type fini est principal.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) est banale.

(vii) $\Rightarrow$ (iii). Il suffit d'appliquer [G3, Theorem 17.3(e)], car alors on déduit que tout idéal premier non zéro de A ne peut pas être idempotent.

(iii) $\Rightarrow$ (viii). En effet, tout suranneau d'un anneau de valuation discrète forte est encore un anneau de valuation discrète forte (Lemme 2.1(b)), donc en particulier PA_P est principal dans A_P, pour tout idéal premier P de A (Lemme 2.1(c)).

(viii) $\Rightarrow$ (iii). Pour tout idéal premier non zéro P de A, on a $P = PA_P = xA_P \neq x^2A_P = P^2A_P = P^2$, où $x \in A_P$.

(x) $\Rightarrow$ (viii). Soit P un idéal premier non zéro de A et $p \in P$, $p \neq 0$, alors l'idéal $I := pA_P \subseteq PA_P = P \subset A$ est un idéal de A. Par conséquent, il existe $x \in K$ et $P' \in \mathrm{Spec}(A)$ tels que $xI = xpA_P = P'$. Du fait que xp ne peut pas être un élément inversible dans A_P, il découle que $xp \in P$ et donc $P' \subseteq P$. Pour conclure que $P' = P$, il suffit de remarquer que $A_{P'} = (P' : P') = (xpA_P : xpA_P) = (A_P : A_P) = A_P$ (cf. [HP, Theorem 3.2; AHP, Theorem 2.8]). On peut parvenir à la même conclusion en remarquant que $P'A_P = xpA_P$ et que, dans un anneau de valuation, le seul idéal premier non zéro qui peut être principal est l'idéal maximal.

(viii) $\Rightarrow$ (ix). Soit I un idéal non zéro de A. Si I est invertible alors I est principal dans A et donc, a fortiori, il est principal dans $(I : I)$. Si I n'est pas inversible, alors $P := II^{-1}$ est un idéal premier de A [FHP, Proposition 2.1, Lemme 2.2], donc $P = PA_P = II^{-1}A_P = pA_P$, pour un quelque $p \in P$. Par conséquent, $I(I^{-1}p^{-1})A_P = A_P$, donc I est inversible dans $A_P = (I : I)$ [AHP, Theorem 2.8].

(ix) $\Rightarrow$ (viii). L'anneau A est local et intégralement clos, donc pour montrer qu'il est de valuation il suffit de montrer que tout idéal non zéro de type fini I est inversible dans A. La conclusion s'ensuit du fait que $(I : I) = A$ [B, Chap. VII, §1, Ex. 6(b)]. Si P est un idéal premier non zéro de A alors $(P : P) = A_P$ [AHP, Theorem 2.8], donc P est principal dans A_P.

(ix) $\Rightarrow$ (x). Soit I un idéal non zéro de A. Supposons, d'abord, que I soit inversible dans A, i.e., $I = iA$ pour un quelque $i \in A$. Du fait que $M = aA$ pour un quelque $a \in A$ (car (ix) $\Leftrightarrow$ (viii)) alors $i^{-1}aI = M$. Si I n'est pas inversible, alors on sait que $P := II^{-1}$ est un idéal premier de A. Il est clair alors que $(I : I) = (II^{-1} : II^{-1}) = (P : P) = A_P$ [AHP, Theorem 2.8; HP, Prop. 2.2] et donc $I = I(I : I) = IA_P$. Par conséquent, $IA_P = iA_P$ et $P = PA_P = pA_P$ pour quelque $i \in I$ et $p \in P$, donc $pi^{-1}I = P$. ∎

Remarque 2.3. Il est possible de caractériser, dans la classe des anneaux intègres de valuation discrète, les anneaux de valuation discrète forte en termes de relation d'ordre opposé à l'ordre naturel (d'inclusion ensembliste) du spectre premier.

Précisément, si A est un anneau quelconque, nous dénotons par $\mathrm{Spec}(A)^H$ le spectre premier de A équipé par la topologie de "l'ordre opposé" de Hochster, c.-à-d. la topologie qui a comme base pour les fermés les ouverts quasi-compacts dans la topologie de Zariski de $\mathrm{Spec}(A)$. Il est bien connu que tout espace T_0 (e.g. $\mathrm{Spec}(A)$ équipé par la topologie de Hochster ou celle de Zariski) détermine une relation d'ordre sur son espace sous-jacent:

$$x \leq y :\Leftrightarrow y \text{ appartient à l'adhérence de } x.$$

On sait que $\mathrm{Spec}(A)^H$ est un espace spectral, car la topologie constructible (ou *patch topology*) associée à $\mathrm{Spec}(A)^H$ coincide avec la topologie constructible associée à $\mathrm{Spec}(A)$ équipé par la topologie de Zariski; de plus, il n'est pas difficile de montrer que l'ordre induit sur $\mathrm{Spec}(A)$ par la topologie de Hochster est exactement l'ordre opposé de l'ordre induit sur $\mathrm{Spec}(A)$ par la topologie de Zariski [Ho, Propositions 7 et 8].

Nous rappelons qu'un *espace discret d'Alexandroff* est un espace topologique T_0 tel que toute intersection d'ouverts est un ouvert et qu'un anneau A est dit *noethérien à morceaux* (*piecewise Noetherian*) si (a) toute suite croissante d'idéaux premiers de A est stationnaire; (b) tout idéal de A possède seulement un nombre fini d'idéaux premiers minimaux; (c) pour chaque idéal premier P de A toute suite croissante d'idéaux P-primaires est stationnaire.

Si V est un anneau de valuation alors il est possible de montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes:

(j) V est un anneau de valuation discrète forte;

(jj) $\mathrm{Spec}(V)^H$ est bien ordonné;

(jjj) $\mathrm{Spec}(V)^H$ est un espace discret d'Alexandroff;

(jv) V est un anneau noethérien à morceaux.

Nous signalons aussi qu'une caractérisation des anneaux de valuation discrète forte, en termes de modules pathologiques, a été donnée dans [Z].

Dans le cas local de dimension finie nous avons une description explicite des anneaux de Dedekind généralisés. Nous commençons par un lemme.

LEMME 2.4. *Soit* (V', M') *un anneau de valuation et soit* u: $V' \to V'/M' =: k'$ *la projection canonique sur son corps résiduel. Soit* V'' *un autre* *anneau de valuation ayant comme corps de fractions le corps k'. Dans le diagramme cartésien d'homomorphismes canoniques:*

$$\begin{tikzcd} V := u^{-1}(V'') \arrow[r] \arrow[d] & V'' \arrow[d] \\ V' \arrow[r, "u"] & k' \end{tikzcd}$$

l'anneau V est de valuation discrète (respectivement, discrète forte) si et seulement si V' et V'' sont anneaux de valuation discrète (respectivement, discrète forte).

Démonstration. Soit $P := M' \cap V$, alors il est facile de voir que $P = M'$, $V' = V_{M'}$, V'' est canoniquement isomorphe à V/M' et V est un anneau de valuation (cf. par exemple [F, Theorem 2.4]). De plus, si nous considérons un idéal premier Q de V, alors deux cas sont possibles:

1$^{\text{er}}$ *Cas.* $Q \subset P$. Dans cette situation Q est aussi un idéal premier de V' et $V_Q = V'_Q$.

2$^{\text{ème}}$ *Cas.* $Q \supseteq P$. Alors, il existe un unique idéal premier Q'' dans V'' tel que $u^{-1}(Q'') = Q$ et $V/Q \cong V''/Q''$.

La conclusion est désormais immédiate. ∎

Dans la situation du Lemme 2.4, nous utiliserons aussi la notation de produit fibré $V' \times_{k'} V''$ à la place de $V = u^{-1}(V'')$.

PROPOSITION 2.5. *Soit V un anneau de valuation de dimension finie $n \geq 1$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(i) *V est un anneau de valuation discrète forte;*

(ii) *V est un anneau de valuation discrète;*

(iii) *$V = V_n \times_{k_n} (V_{n-1} \times_{k_{n-1}} (\cdots (V_2 \times_{k_2} V_1) \cdots))$ où V_i est un anneau de valuation discrète di dimension 1, k_i est son corps résiduel $(1 \leq i \leq n)$ et le corps des fractions de V_{i-1} coïncide avec k_i $(2 \leq i \leq n)$.*

(iv) *le groupe des valeurs de V est isomorphe, en tant que groupe ordonné, au groupe $\mathbb{Z}^n$ ordonné lexicographiquement.*

Démonstration. Si $n \geq 2$ et si P est un idéal premier non zéro et non maximal de V, alors V est isomorphe à $V_P \times_{V_P/PV_P} V/P$. Le résultat est alors une conséquence facile du Lemme 2.4, du Théorème 2.2 ((iii) $\Leftrightarrow$ (iv)) et de [B, Chap. VI, §4, N. 3 et §10, N. 2, Lemme 2]. ∎

Une caractérisation des anneaux de valuation discrète forte (non nécessairement de dimension finie) en termes de leur groupe de valeurs a été donnée par Popescu [P, Proposition 2.4 et Proposition 1.3].

Maintenant nous considérons le cas global. Nous dirons qu'un anneau A est un *anneau de Prüfer discret* (respectivement, *discret fort*) si, pour tout $P \in \mathrm{Spec}(A)$, A_P est un anneau de valuation discrète (respectivement, discrète forte).

Il est facile de prouver que, si A est un anneau de Prüfer, alors A est un anneau de Prüfer discret si et seulement si tout idéal primaire est une puissance d'un idéal premier [G3, Theorem 17.3(b) et p. 295].

LEMME 2.6. *Soit A un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est de Prüfer discret fort*;

(ii) *A est un anneau de Prüfer et tout idéal premier non zéro de A n'est pas idempotent*;

(iii) *A est un anneau de Prüfer discret vérifiant la condition de la chaîne ascendente sur les idéaux premiers.*

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Pour tout idéal premier $P \neq (0)$, il est clair que $P \neq P^2$ si et seulement si, pour tout idéal premier $Q \supseteq P$, on a $PA_Q \neq P^2A_Q$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est conséquence du Théorème 2.2 ((iii) $\Leftrightarrow$ (iv)). ∎

Il est clair que dans le cas d'un anneau de dimension finie la notion d'anneau de Prüfer discret fort coïncide avec celle d'anneau de Prüfer discret (Proposition 2.5) et qu'un anneau presque-Dedekind est un anneau de Prüfer discret (fort) de dimension 1.

Dans ses études sur des classes d'anneaux de Prüfer qui ont un comportement "proche" à celui des anneaux de Dedekind, Gilmer, a été amené à introduire la condition suivante:

$$(\#) \quad \text{Si } \Delta_1 \neq \Delta_2, \text{ avec } \Delta_i \subseteq \mathrm{Max}(A),\ 1 \leq i \leq 2, \text{ alors:}$$
$$\cap\{A_M : M \in \Delta_1\} \neq \cap\{A_M : M \in \Delta_2\}$$

[G2; G1, p. 817]. Successivement, Popescu [P] a considéré une version plus forte de la condition (#):

$$(\#_{\mathrm{P}}) \quad \text{Si } \Delta_1 \neq \Delta_2, \text{ avec } \Delta_i \subseteq \mathrm{Spec}(A),\ 1 \leq i \leq 2, \text{ et si tout couple d'idéaux premiers distincts non zéro } P_1 \in \Delta_1,\ P_2 \in \Delta_2 \text{ est tel que } P_1 + P_2 = A, \text{ alors } \cap\{A_P : P \in \Delta_1\} \neq \cap\{A_P : P \in \Delta_2\}.$$

Nous dirons qu'un anneau vérifie la condition (##) (respectivement, $(\#\#_{\mathrm{P}})$) si tous ses suranneaux vérifient la condition (#) (respectivement, $(\#_{\mathrm{P}})$).

Nous sommes maintenant en condition de donner un théorème de caractérisation des anneaux de Dedekind généralisés:

THÉORÈME 2.7. *Soit A un anneau de Prüfer. Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un anneau de Dedekind généralisé.*

(ii) *Pour tout système localisant $\mathcal{F}$ de A on a $\mathcal{F} = \{I : I$ idéal de A tel que $IA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}\}$.*

(iii) *Tout système localisant de A est de type fini.*

(iv) *Tout système localisant $\mathcal{F}$ de A est uniquement représentable comme une intersection irrédondante du type suivant*:

$$\mathcal{F} = \cap\{\mathcal{F}_P : P \in \Phi\}$$

où Φ est un ensemble d'idéaux premiers comaximaux dans A tels que $\lambda: \Phi \to \mathrm{Max}(A_{\mathcal{F}})$, $P \mapsto PA_{\mathcal{F}}$, est bijective.

(v) *A est un anneau de Prüfer discret fort et tout idéal radical de A est le radical d'un idéal de type fini.*

(vi) *A est un anneau de Prüfer discret fort et tout idéal premier de A est le radical d'un idéal de type fini.*

(vii) *A est un anneau de Prüfer discret fort et* $\mathrm{Spec}(A)$ *est un espace noethérien.*

(viii) *A est un anneau de Prüfer discret fort et, pour tout idéal non zéro I de A, l'ensemble de tous les idéaux premiers minimaux de I,* $\mathrm{Min}(I)$, *est fini.*

(ix) *A est un anneau de Prüfer discret fort et, pour tout idéal principal non zéro I de A,* $\mathrm{Min}(I)$ *est fini.*

(x) *Tout suranneau de A est un anneau de Dedekind généralisé.*

(xi) *A est un anneau de Prüfer discret fort qui vérifie la propriété* $(\#\#_P)$.

(xii) *A est un anneau de Prüfer discret fort qui vérifie la propriété* $(\#\#)$.

De plus, si A est un anneau de Prüfer discret fort et si la représentation $A = \cap\{A_M : M \in \mathrm{Max}(A)\}$ est localement finie (i.e. tout élément non nul de A appartient à un nombre fini d'idéaux maximaux), alors A est un anneau de Dedekind généralisé.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont des conséquences faciles du Lemme 1.1.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Dans la situation du Lemme 1.1, il suffit de prouver que si $\mathcal{F}$ est un système localisant de type fini dans $\mathcal{F}(B)$ et si $I \in \mathcal{F}$ est un idéal de type fini alors $IB = B$. En effet, dans un anneau de Prüfer tout idéal de type fini est inversible, donc $I(A : I) = A$ [G3, Theorem 22.1].

(i) $\Rightarrow$ (iv). Soit $\Phi := \{M \cap A \colon M \in \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}})\}$. Du fait que A est un anneau de Prüfer, il s'ensuit que $A_{\mathcal{F}}$ est A-plat, donc les idéaux de Φ sont premiers et comaximaux. En outre, pour tout $P \in \Phi$,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1(A_{\mathcal{F}}) = \{I : I \text{ idéal de } A \text{ tel quel } IA_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{F}}\} \subseteq \mathcal{F}_P,$$

[G3, Theorem 26.1], donc $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' := \cap\{\mathcal{F}_P\colon P \in \Phi\}$. L'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ découle du fait que A est un anneau de Dedekind généralisé, que $\mathcal{F}'$ est un système localisant de A (obtenu par intersection de systèmes localisants) et que

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{F}'} &= \cap\{A_{\mathcal{F}_P}\colon P \in \Phi\} = \cap\{A_P\colon P \in \Phi\} \\ &= \cap\{(A_{\mathcal{F}})_M\colon M \in \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}})\} = A_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

De plus, l'application λ est bijective car

$$P = M \cap A \in \Phi \Leftrightarrow PA_{\mathcal{F}} = M \in \operatorname{Max}(A_{\mathcal{F}}).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) est une conséquence facile de [G3, Theorem 26.1; Exercise 2, p. 339; Exercise 4, p. 340].

(v) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) [OP, Proposition 2.1 and Corollary 2.4].

(i) $\Leftrightarrow$ (vi) [P, Theorem 2.5].

(i) $\Leftrightarrow$ (viii) $\Leftrightarrow$ (ix) découlent de la démonstration de [PP, Theorem 3].

(i) $\Rightarrow$ (x). Soit B un suranneau de A et soit $\mathcal{G}$ un système localisant de B. En conséquence de (i) $\Leftrightarrow$ (iii), il suffit de montrer que $\mathcal{G}$ est de type fini. Soit $\mathcal{F} = \{I : I \text{ idéal de } A \text{ et } IB \in \mathcal{G}\}$. Il est clair que $\mathcal{F}$ vérifie (SL0) et (SL1). Soient $I \in \mathcal{F}$ et J un idéal de A tel que $(J :_A iA) \in \mathcal{F}$, alors par la platitude de B sur A il découle que $(J :_A iA)B = (JB :_B iB) \in \mathcal{G}$, pour tout $i \in I$, d'où $JB \in \mathcal{G}$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est un système localisant de A, donc $\mathcal{F}$ est de type fini ((i) $\Leftrightarrow$ (iii)). En utilisant encore la platitude de B sur A on déduit que $\mathcal{G}$ est de type fini.

(x) $\Rightarrow$ (i) est banale.

(i) $\Rightarrow$ (xi) est une conséquence de (i) $\Leftrightarrow$ (x) est de [P, Proposition 3.2].

(xi) $\Rightarrow$ (xii) est banale.

(xii) $\Rightarrow$ (ix) découle de [GH, Proposition 3 et Theorem 4].

La dernière affirmation du théorème découle de (i) $\Leftrightarrow$ (ix) et du fait que si, pour tout élément non zéro $x \in A$ l'ensemble des idéaux maximaux qui contiennent xA est fini, alors nécessairement $\mathrm{Min}(xA)$ est fini. ∎

Dans l'Exemple 4.2 nous verrons que cette dernière propriété est une condition suffisante, mais non nécessaire, afin que l'anneau A soit un anneau de Dedekind généralisé.

Des résultats qui précèdent on peut déduire facilement:

COROLLAIRE 2.8. *Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un anneau de Dedekind.*

(ii) *A est un anneau de Dedekind généralisé de dimension* 1.

(iii) *A est un anneau de Dedekind généralisé et presque-Dedekind.*

(iv) *A est un anneau presque-Dedekind qui vérifie* (##).

(v) *A est un anneau de Prüfer discret fort de dimension* 1 *et, pour tout idéal I de A*, $\mathrm{Min}(I)$ *est fini.*

(vi) *A est un anneau de Prüfer discret fort de dimension* 1 *et, pour tout idéal principal I de A*, $\mathrm{Min}(I)$ *est fini.*

(vii) *Tout suranneau de A est un anneau de Dedekind.*

3. ANNEAUX DE DEDEKIND GÉNÉRALISÉS ET EXTENSIONS DE CORPS

Dans ce paragraphe nous étudierons le problème de la permanence de la propriété d'être un anneau de Dedekind généralisé dans quelques cas importants d'extensions du corps de fractions.

Nous commençons par rappeler le résultat suivant:

LEMME 3.1 [P, COROLLARY 2.8]. *Soit A un anneau de Prüfer discret fort (respectivement, un anneau de Dedekind généralisé) avec corps de fractions K et soit F une extension finie du corps K. Alors, la fermeture intégrale $\bar{A}$ de A dans F est encore un anneau de Prüfer discret fort (respectivement, un anneau de Dedekind généralisé).*

Arnold et Gilmer [AG] ont développé une théorie qui permet de déduire un résultat concernant la permanence de la propriété d'être un anneau de Prüfer discret fort par passage à la fermeture intégrale dans une extension algébrique de corps.

(*) Soit A un anneau, K son corps de fractions et soit L une extension algébrique de K. Le corps L peut être obtenu comme la limite inductive d'une famille $\{K_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ d'extensions finies du corps K. Nous supposons que $K \in \{K_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$. Soit $\bar{A}_\gamma$ (respectivement, $\bar{A}$) la fermeture intégrale de A dans K_γ (respectivement, L).

Soit P un idéal premier non zéro non idempotent de A et soit $\{P_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ une famille d'idéaux premiers tels que

(a) P_γ est un idéal premier de $\bar{A}_\gamma$ et $P_\gamma \cap A = P$, pour tout $\gamma \in \Gamma$;

(b) si $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$ et $K_{\gamma'} \subset K_{\gamma''}$, alors $P_{\gamma''} \cap \bar{A}_{\gamma'} = P_{\gamma'}$;

dans cette situation à la famille $\{P_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ est univoquement associée une famille d'entiers $\{e_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ où $P(\bar{A}_\gamma)_{P_\gamma} = P_\gamma^{e_\gamma}(\bar{A}_\gamma)_{P_\gamma}$.

PROPOSITION 3.2. *Soit A un anneau de Prüfer discret fort avec corps de fractions K, soit L une extension algébrique de K et soit $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A dans L. Avec les notations introduites ci-dessus, alors $\bar{A}$ est un anneau de Prüfer discret fort si et seulement si, pour tout idéal premier non zéro non idempotent P de A et pour toute famille $\{P_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ satisfaisante* (a) *et* (b), *la famille d'entiers $\{e_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ est bornée.*

Démonstration. L'énoncé découle immédiatement de [AG, Theorem 3.5]. ∎

Nous nous proposons maintenant d'étudier la permanence de la propriété d'être un anneau de Dedekind généralisé par passage à la fermeture intégrale dans une extension algébrique.

THÉORÈME 3.3. *Soit A un anneau de Dedekind généralisé avec corps de fractions K et soit L une extension algébrique de K. Supposons que pour tout idéal premier non zéro P de A il existe seulement une famille finie d'idéaux maximaux de A qui contiennent P. Supposons en outre que dans le corps L une famille $\{(V_\lambda, m_\lambda): \lambda \in \Lambda\}$ d'anneaux de valuation soit donnée avec la propriété que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un idéal maximal $M(\lambda)$ de A tel que V_λ domine $A_{M(\lambda)}$. Soit $A(\Lambda) := \cap\{V_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$, alors $A(\Lambda)$ est un anneau de Dedekind généralisé si et seulement si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, V_λ est un anneau de valuation discrète forte et, pour tout $M \in$* Max*(A), l'ensemble $\Lambda(M) = \{\lambda \in \Lambda: V_\lambda$ domine $A_M\}$ est fini.*

Démonstration. Avec les notations $(*)$, posons par simplicité $B := A(\Lambda)$ et $B_\gamma := B \cap K_\gamma$, pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Des hypothèses, on a que $\bar{A} \subseteq B$ et donc $\bar{A}_\gamma \subseteq B_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, par conséquent B_γ est un anneau de Dedekind généralisé (Lemme 3.1 et Théorème 2.7 (i) ⇒ (x)).

Commençons par montrer que B est un anneau de Dedekind généralisé.

1er *Pas.* Pour tout idéal premier $q \in B_\gamma$, il existe un index $\lambda \in \Lambda$ et un idéal premier Q de V_λ tel que $Q \cap B_\gamma = q$.

Soit $\overline{M}_\lambda = \overline{M}_{\lambda,\gamma} := m_\lambda \cap \overline{A}_\gamma$. Par hypothèse, $m_\lambda \cap A$ est un idéal maximal de A; du fait que $A \hookrightarrow \overline{A}_\gamma$ est une extension entière il s'ensuit que $\overline{M}_\lambda$ est un idéal maximal de $\overline{A}_\gamma$. Soit $N_\lambda = N_{\lambda,\gamma} := m_\lambda \cap B_\gamma$, alors la propriété de prüferianité de $\overline{A}_\gamma$ (et B_γ) nous assure que $B_\gamma = \cap\{(B_\gamma)_{N_\lambda}: \lambda \in \Lambda\} = \cap\{(\overline{A}_\gamma)_{\overline{M}_\lambda}: \lambda \in \Lambda\}$ [G3, Theorem 26.2], car les idéaux maximaux $\{N_\lambda = \overline{M}_\lambda B_\gamma: \lambda \in \Lambda\}$ sont tous les idéaux maximaux de B_γ.

Soit q un idéal premier dans B_γ, alors $q \subseteq \overline{M}_\lambda B_\gamma = N_\lambda$ pour un quelque $\lambda \in \Lambda$, donc $q = Q \cap B_\gamma$ pour un quelque idéal premier Q de V_λ, car $(B_\gamma)_{N_\lambda} = V_\lambda \cap K_\gamma$ [G3, Theorem 19.16(b)].

$2^{\text{ème}}$ *Pas*. Supposons que $\Lambda(M)$ soit fini, pour tout $M \in \operatorname{Max}(A)$. Soit N un idéal maximal de B, alors $N = m_\lambda \cap B$, pour un unique $\lambda \in \Lambda$. Si, de plus, V_λ est un anneau de valuation discrète forte pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors B est un anneau de Prüfer discret fort.

Soit $P := N \cap A$ et soient $M_1, M_2, \ldots, M_r$ les idéaux maximaux de A qui contiennent P. Notons par Λ_P l'ensemble $\cup\{\Lambda(M_i): 1 \le i \le r\}$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $N \cap B_\gamma \subseteq m_{\lambda(\gamma)} \cap B_\gamma$ pour un quelque $\lambda(\gamma) \in \Lambda_P$, car nous savons que $\{m_\lambda \cap B_\gamma: \lambda \in \Lambda\}$ est l'ensemble de tous les idéaux maximaux de B_γ (1^{er} Pas) et que $m_{\lambda(\gamma)} \cap A \supseteq N \cap A = P$. Donc

$$N = \varinjlim N \cap B_\gamma \subseteq \cup\{m_\lambda \cap B: \lambda \in \Lambda_P\}.$$

Par la finitude de Λ_P, nous déduisons que $N \subseteq m_\lambda \cap B$ pour un unique λ de Λ_P. Par la maximalité de N dans B, nous pouvons conclure que $N = m_\lambda \cap B$.

La deuxième partie de l'énoncé découle du fait que $B_N = V_\lambda$.

$3^{\text{ème}}$ *Pas*. Dans la même situation et sous les mêmes hypothèses du $2^{\text{ème}}$ Pas, pour tout idéal non zéro J de B l'ensemble $\{N \in \operatorname{Max}(B): N \supseteq J\}$ est fini.

Par le $2^{\text{ème}}$ Pas, il suffit de montrer que $\{\lambda \in \Lambda: m_\lambda \cap B \supseteq J\}$ est fini. Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $J \cap B_\gamma \neq (0)$. Du fait que B_γ est un anneau de Dedekind généralisé $\operatorname{Min}(J \cap B_\gamma) = \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$ est fini. Soit $p_i := q_i \cap A$ est soit $\{M_h: 1 \le h \le t\}$ l'ensemble (fini) de tous les idéaux maximaux de A qui contiennent au moins un des idéaux p_i, $1 \le i \le s$. Soit $\Lambda(J) := \cup\{\Lambda(M_h): 1 \le h \le t\}$. Du fait que $\Lambda(M_h)$ est fini pour tout h, il s'ensuit que $\Lambda(J)$ est fini. Si $N := m_\lambda \cap B$ est un idéal maximal de B qui contient J, alors $m_\lambda \cap A \supseteq p_i$ pour un quelque i $(1 \le i \le s)$, donc $\lambda \in \Lambda(J)$.

Etant B un anneau de Prüfer (discret fort), du $3^{\text{ème}}$ Pas, nous déduisons que, pour tout idéal non zéro J de B, $\operatorname{Min}(J)$ est fini. Nous pouvons conclure que B est un anneau de Dedekind généralisé (Théorème 2.7 (viii) $\Rightarrow$ (i)).

Réciproquement, si B est un anneau de Dedekind généralisé alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, V_λ est un anneau de valuation discrète forte (Théorème

2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (x) et Proposition 2.2 (i) $\Leftrightarrow$ (iii)). Si $\Lambda(M)$ n'est pas fini pour un quelque M, alors l'idéal MB ne vérifie pas la condition (viii) du Théorème 2.7. ∎

COROLLAIRE 3.4. *Avec les notations du Théorème* 3.3, *supposons que A soit un anneau de Dedekind et que V_λ soit un anneau de valuation discrète de dimension* 1. *Alors, $A(\Lambda)$ est un anneau de Dedekind si et seulement si $\Lambda(M)$ est un ensemble fini, pour tout $M \in \mathrm{Max}(A)$.* ∎

Le corollaire précédent permet de réobtenir un résultat classique sur la propriété de Dedekind de la fermeture intégrale d'un anneau de Dedekind dans une extension algébrique de son corps de fractions:

COROLLAIRE 3.5. *Soit A un anneau de Dedekind avec corps de fractions K et soit L une extension algébrique de K. Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble de tous les suranneaux de valuation de la fermeture intégrale $\bar{A}$ de A dans L. Alors, $\bar{A}$ est de Dedekind si et seulement si tout $V \in \mathscr{V}$ est un anneau de valuation discrète de dimension* 1 *et, pour tout $M \in \mathrm{Max}(A)$, $\mathscr{V}(M) := \{V \in \mathscr{V}\colon V$ domine $A_M\}$ est fini.* ∎

THÉORÈME 3.6. *Soit A un anneau de Prüfer avec corps de fractions K et soit $X = \{X_i\colon i \in I\}$ un ensemble d'indéterminées sur K. Soit $K(X) = K(\{X_i\colon i \in I\})$ le corps des fonctions rationnelles à coefficients dans K. Pour tout idéal maximal M de A, nous dénotons par v_M la valuation associée à A_M. Soit v_M^* la valuation extension canonique de v_M au corps $K(X)$* [*G*3, *p*. 218] *et soit V_M^* l'anneau de valuation de $K(X)$ associé à v_M^*. Alors, $A^* = \cap\{V_M^*\colon M \in \mathrm{Max}(A)\}$ est un anneau de Prüfer discret fort* (*respectivement, Dedekind généralisé*) *si et seulement si A est un anneau de Prüfer discret fort* (*respectivement, Dedekind généralisé*).

Démonstration. Il est bien connu que A^* est l'anneau des fonctions de Kronecker par rapport à la $*$-opération banale, $I \mapsto I^* := \cap\{IA_M\colon M \in \mathrm{Max}(A)\} = \cap\{IV\colon V$ suranneau de valuation de $A\} = I$, donc A^* est un anneau de Bézout [G3, Theorem 32.7(b), Theorem 32.11] qui coïncide avec l'anneau de Nagata $A(X) = S^{-1}A[X]$, où $S := \{f \in A[X]\colon$ l'idéal engendré par les coefficients de f coïncide avec $A\}$ [G3, Theorem 33.4, Theorem 24.7].

Pour montrer que $A(X)$ est un anneau de Prüfer discret fort si et seulement si A est de même, il suffit de montrer que V_M^* est un anneau de valuation discrète forte si et seulement si V_M est un anneau de valuation discrète forte. En effet, tout idéal maximal M^* de A^* coïncide avec $MA^* = MA(X)$, où $M := M^* \cap A$ est un idéal maximal de A et $A^*_{M^*} = V_M^* = A_M(X)$ [G3, Proposition 33.1(3), Corollary 5.3]. Soit P^* un idéal premier non zéro de A^* et soit $P := P^* \cap A$, alors $P^* \subseteq MA^* = M^*$ pour un quelque idéal maximal M de A tel que $P \subseteq M$. Il est facile de voir que $A^*_{P^*} = (A^*_{M^*})_{P^*A^*_{M^*}} = (A_M(X))_{PA_M(X)} = A_P(X)$ et donc $PA_P \neq P^2A_P$ si et seulement si $P^*A^*_{P^*} \neq P^{*2}A^*_{P^*}$ [G3, Proposition 18.7, Proposition 33.1].

Si A est un anneau de Dedekind généralisé alors, pour tout idéal premier non zéro P^* de A^*, l'idéal premier non zéro $P := P^* \cap A$ est le radical d'un idéal de type fini de A. Par conséquent, il est clair que $P^* = PA^*$ est aussi le radical d'un idéal de type fini de A^*, d'où A^* est un anneau de Dedekind généralisé (Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (vi)).

Inversement, supposons que A^* soit un anneau de Dedekind généralisé. Du fait que, pour tout idéal I de A, $IA^* \cap A = I$ [G3, Proposition 33.1 (4)], il est clair que, si $\mathrm{Min}(IA^*)$ est fini, alors $\mathrm{Min}(I)$ est aussi fini, donc A est un anneau de Dedekind généralisé (Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (viii)). ∎

4. Anneaux de Dedekind généralisés et produits fibrés: exemples

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier le comportement des propriétés d'être "un anneau de Prüfer discret fort" ou "un anneau de Dedekind généralisé", dans des carrés cartésiens d'un type standard.

Théorème 4.1. *Soit B un anneau et M un idéal maximal non zéro de B. Soit D un sous-anneau du corps résiduel $k := B/M$ de B dans M et soit u: $B \to k$ la projection canonique. Considérons le produit fibré des homomorphismes canoniques*:

$$\begin{array}{ccc} A := u^{-1}(D) & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{u} & k \end{array}$$

Alors, A est un anneau de Prüfer discret fort (respectivement, Dedekind généralisé) si et seulement si B et D sont des anneaux de Prüfer discrets forts (respectivement, Dedekind généralisé) et k est le corps de fractions de D.

Démonstration. Dans la situation décrite ci-dessus, il est facile de voir que M est aussi un idéal de A et que $A/M \cong D$ [F, Theorem 1.4]. De plus, il est bien connu que A est un anneau de Prüfer si et seulement si B et D sont des anneaux de Prüfer et k est le corps de fractions de D (cf. par exemple [F, Proposition 2.2 et Theorem 2.4]). Plus précisément, on sait que si P est un idéal premier de A, alors deux cas sont possibles:

1er *Cas*. Si $P \not\supseteq M = (A : B)$, alors PB est un idéal premier de B et $A_P = B_{PB}$.

2ème *Cas*. $P \supseteq M$. Posons par simplicité $D = A/M$, $\bar{P} := P/M$ et $u_M : B_M \to B_M/MB_M = k$. Alors, $A_P = u_M^{-1}(D_{\bar{P}})$, en particulier, si $P = M$ et k est le corps des fractions de D alors $A_M = B_M$.

Soit k le corps des fractions de D. Si A est un anneau de Prüfer discret fort, alors B et D sont aussi des anneaux de Prüfer discrets forts et réciproquement. En effet, si $\bar{P} \in \mathrm{Spec}(D)$ est un idéal premier non zéro de D, alors $\bar{P} = P/M$ avec $P \in \mathrm{Spec}(A)$ et $P \supset M$, donc si $P \neq P^2$ alors aussi $\bar{P} \neq \bar{P}^2$. Si $Q \in \mathrm{Spec}(B)$ est un idéal premier non zéro et $Q \not\supseteq M$ alors $P := Q \cap A$ est un idéal premier de A tel que $A_P = B_Q$ (1er Cas). Si $Q = M$ et k est le corps des fractions de D alors $A_M = B_M$ (2ème Cas). Du fait que $PA_P \neq P^2A_P$ alors $QB_Q \neq Q^2B_Q$. Similairement, on démontre la réciproque.

Si A est un anneau de Dedekind généralisé alors B est aussi un anneau de Dedekind généralisé (Théorème 2.7 (i) $\Rightarrow$ (x)). Si $\bar{P} = P/M$ est un idéal premier de D, où P est un idéal premier de A et $P \supseteq M$ alors $\bar{P}$ est le radical d'un idéal de type fini, car P et M sont les radicaux de deux idéaux de A de type fini. Donc D est aussi un anneau de Dedekind généralisé (Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (vi)).

Réciproquement, si D et B sont des anneaux de Dedekind généralisés et si I est un idéal non zéro de A alors les idéaux premiers minimaux de I sont les images réciproques des idéaux premiers minimaux de ID et IB [F, Corollary 1.5]. Du fait que $\mathrm{Min}(ID)$ et $\mathrm{Min}(IB)$ sont finis, il s'ensuit que $\mathrm{Min}(I)$ est fini et donc que A est un anneau de Dedekind généralisé (Théorème 2.7 (i) $\Leftrightarrow$ (viii)). ∎

Le théorème précédent nous permet de construire plusieurs exemples d'anneaux de Prüfer discrets forts et d'anneaux de Dedekind généralisés, dont le spectre peut être facilement décrit. En effet, dans la situation du Théorème 4.1, $\mathrm{Spec}(A)$ est homéomorphe à la somme amalgamée $\mathrm{Spec}(B) \coprod_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(D)$ [F, Theorem 1.4].

Exemple 4.2. Soit p un entier premier et X une indéterminée sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Alors

$$\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X] \qquad (4.2.1)$$

$$\mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \qquad (4.2.2)$$

$$\mathbb{Z}_{(p)} + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \qquad (4.2.3)$$

sont tous des anneaux de Dedekind généralisés de dimension 2. L'anneau

(4.2.1) a une infinité d'idéaux premiers de hauteur 1. L'anneau (4.2.2) a un seul idéal premier de hauteur 1 et une infinité d'idéaux maximaux. L'anneau (4.2.3) est un anneau de valuation discrète forte.

EXEMPLE 4.3. Soit B un anneau de Dedekind généralisé, ayant K comme corps de fractions, et soit X une indéterminée sur k. Soit $f(X) \in B[X]$ un polynôme irréductible dans $K[X]$ tel que $K[X]/f(X)K[X] \cong K$. Alors, $A_1 := B + f(X)K[X]$ et $A_2 := B + f(X)K[X]_{(f(X))}$ sont des anneaux de Dedekind généralisés avec $\dim A_1 = \dim A_2 = \dim B + 1$ (Théorème 4.1 et [F, Theorem 1.4 et Proposition 2.1]). De plus si B n'est pas un anneau de Bézout, alors A_1 et A_2 ne sont pas des anneaux de Bézout. Par exemple soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ une extension quadratique de $\mathbb{Q}$ et soit B la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Il est bien connu que B est un anneau de Dedekind et qu'on peut choisir l'entier d de façon telle que B ne soit pas de Bézout. Dans ce cas les anneaux A_1 et A_2 sont des anneaux de Dedekind généralisés, qui ne sont pas de Bézout.

EXEMPLE 4.4. Des exemples immédiats d'anneaux de Prüfer discrets forts qui ne sont pas des anneaux de Dedekind généralisés sont donnés par les anneaux presque-Dedekind non noethériens. Par exemple, l'anneau $\mathcal{O}_K$ des entiers algébriques dans le corps $K := \mathbb{Q}(\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_p, \ldots)$, où ζ_p est une p-racine primitive de l'unité et p varie dans l'ensemble des entiers premiers, est un anneau presque-Dedekind qui n'est pas de Dedekind, [N]. (Pour d'autres exemples voir [G4]).

Un exemple d'un anneau de Prüfer discret fort de dimension 2, qui n'est pas un anneau de Dedekind généralisé est donné par l'anneau des polynômes à valeurs entières sur un anneau de Dedekind D avec corps des fractions K, $D \neq K$, et corps résiduels finis dans ses idéaux maximaux:

$$\mathrm{Int}(D) := \{f \in K[X]: f(D) \subseteq D\}.$$

En effet, la noethérianité de D nous assure que $\mathrm{Int}(D_M) = \mathrm{Int}(D)_M$ pour tout $M \in \mathrm{Max}(D)$ [CC]. De plus, si V est un anneau de valuation discrète de dimension 1 et son corps résiduel est fini, alors $\mathrm{Int}(V)$ est un anneau de Prüfer de dimension 2 (cf. [C1, Appendice], [Bz], [C2]). Par conséquent, $\mathrm{Int}(D)$ est un anneau de Prüfer discret (fort) de dimension 2. De plus $\mathrm{Int}(D)$ n'est pas un anneau de Dedekind généralisé car, dans cette situation, $\mathrm{Spec}(\mathrm{Int}(D))$ n'est pas un espace noethérien [GHL, Theorem 3.1] (Theorem 2.7 (i) $\Rightarrow$ (vii)).

Une autre technique pour construire des exemples d'anneaux de Dedekind généralisés se base sur l'utilisation du groupe de divisibilité. Par exemple, si $n_1, n_2, \ldots, n_s$ sont des entiers ≥ 2, si $\mathbb{Z}^{n_i}$ est ordonné lexicographiquement pour $1 \leq i \leq s$ et si $G := \mathbb{Z}^{n_1} \oplus \mathbb{Z}^{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}^{n_s}$ est équipé de l'ordre produit, alors G est un groupe réticulé. Il est bien connu qu'il existe un anneau de Bézout A dont le groupe de divisibilité est isomorphe à G, en tant que groupe réticulé (Théorème de Krull–Kaplansky–Jaffard–Ohm [Br, Proposition 1.8]). Il est facile de voir que A est un anneau de Dedekind généralisé semilocal avec $\mathrm{Max}(A) = \{M_1, M_2, \ldots, M_s\}$ et $ht(M_i) = n_i$, $1 \leq i \leq s$ [Br, Proposition 1.2 et Proposition 1.5].

Bibliographie

[A] T. Akiba, Remarks on generalized ring of quotients, *Proc. Japan Acad.* **40** (1964), 801–806.

[AHP] D. F. Anderson, J. Huckaba, et I. Papick, A note on stable domains, *Houston J. Math.* **13** (1987), 13–17.

[AB] J. T. Arnold et J. W. Brewer, On flat overrings, ideal transforms and generalized transforms of a commutative ring, *J. Algebra* **18** (1971), 254–263.

[AG] J. T. Arnold et R. Gilmer, Idempotent ideals and unions of nets of Prüfer domains, *J. Sci. Hiroshima Univ.* **31** (1967), 131–145.

[AM] M. F. Atiyah et I. G. MacDonald, "Introduction to Commutative Algebra," Addison–Wesley, Reading, MA, 1969.

[BW] J. A. Beachy et W. D. Weakley, Piecewise Noetherian rings, *Comm. Algebra* **12** (1984), 2679–2706.

[B] N. Bourbaki, "Algèbre Commutative," Hermann, Paris, 1961.

[Br] W. Brandal, Constructing Bezout domains, *Rocky Mtn. J. Math.* **6** (1976), 383–399.

[BB] W. Brandal et E. Barbut, Localization of torsion theories, *Pacific J. Math.* **107** (1983), 27–37.

[Bz] D. Brizolis, A theorem on ideals on Prüfer rings of integer-valued polynomials, *Comm. Algebra* **7** (1979), 1065–1077.

[CC] P. J. Cahen et J. L. Chabert, Coefficients et valeurs d'un polynôme, *Bull. Sci. Math.* **95** (1971), 295–304.

[C1] J. L. Chabert, Les idéaux premiers de l'anneau de polynômes à valeurs entières, *J. Reine Angew. Math.* **293/294** (1977), 275–283.

[C2] J. L. Chabert, Un anneau de Prüfer, *J. Algebra* **107** (1987), 1–16.

[D] E. D. Davis, Overrings of commutative rings II. Integrally closed overrings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964), 196–212.

[DFP] D. E. Dobbs, M. Fontana, et I. Papick, On the flat spectral topology, *Rend. Mat.* **4** (1981), 559–578.

[F] M. Fontana, Topologically defined classes of commutative rings, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), 331–355.

[FHP] M. Fontana, J. Huckaba, et I. Papick, Domains satisfying the trace property, *J. Algebra* **107** (1987), 169–182.

[G1] R. Gilmer, Integral domains which are almost Dedekind, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 813–818.

[G2] R. Gilmer, Overrings of Prüfer domains, *J. Algebra* **4** (1966), 331–340.

[G3] R. Gilmer, "Multiplicative Ideal Theory," Dekker, New York, 1972.

[G4] R. Gilmer, Prüfer domains and rings of integer-valued polynomials, *J. Algebra* **129** (1990), 502–517.

[GH] R. Gilmer et W. Heinzer, Overrings of Prüfer domains, II, *J. Algebra* **7** (1967), 281–302.

[GHL] R. Gilmer, W. Heinzer, et D. Lantz, The Noetherian property in rings of integer-valued polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **338** (1993), 187–199.

[GD] A. Grothendieck et J. Dieudonné, "Eléments de Géométrie Algébrique," Vol. I, Springer, New York/ Berlin, 1970.

[H] W. Heinzer, Quotient overrings of integral domains, *Mathematika* **17** (1970), 139–148.

[HOP] W. Heinzer, J. Ohm, et R. Pendleton, On integral domains of the form $\cap D_P$, P minimal, *J. Reine Angew. Math.* **241** (1970), 147–159.

[Ho] M. Hochster, Prime ideal structure in commutative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 43–60.

[HP] J. Huckaba et I. Papick, When the dual of an ideal is a ring? *Manuscripta Math.* **37** (1982), 67–85.

[K] W. Krull, Einbettungsfreie fast-Noethersche Ringe und ihre Oberringe, *Math. Nachr.* **21** (1960), 319–338.

[M] P. Maroscia, Topological properties of some classes of G-domains, *Boll. Un. Mat. Ital.* **15** (1978), 688–698.

[N] N. Nakano, Idealtheorie in einem speziellen undendlichen algebraischen Zahlkörpern, *J. Sci. Hiroshima Univ.* **16** (1953), 425–439.

[OP] J. Ohm et R. L. Pendleton, Rings with Noetherian spectrum, *Duke Math. J.* **35** (1968), 631–639.

[P] N. Popescu, A class of Prüfer domains, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **29** (1984), 777–786.

[PP] E. L. Popescu et N. Popescu, A characterization of generalized Dedekind domains, *Bull. Math. Roumanie* **35** (1991), 139–141.

[R] F. Richman, Generalized quotient rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 794–799.

[S] O. F. G. Schilling, The theory of valuations, *Math Surveys Monographs* **4** (1950).

[St] B. Stenström, "Rings of Quotients," Springer-Verlag, New York/ Berlin, 1976.

[Z] P. Zanardo, Valuation domains without pathological modules, *J. Algebra* **96** (1985), 1–8.